**Příklady**: izometrie, lip. zobrazení, homeo.

**Platí**:

$$\begin{tikzcd}
 & \text{izometrie} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow, "(4)"] & \\
\text{lipschitz} \arrow[d, Rightarrow] & & \text{homeo} \arrow[ddl, Rightarrow] \\
\text{stejn. spoj.} \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
 & \text{spoj.} &
\end{tikzcd}$$

Žádná obrácená implikace neplatí:

**(4)**: $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = \operatorname{tg} x$ je homeo, ale není izom.

**Cvičení**: najděte protipříklady.

Uvažujme $((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \rho)$, kde

$$\rho(x,y) = |\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y| .$$ Pak

$$\operatorname{tg} : ((-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}), \rho) \longrightarrow (\mathbb{R}, \rho_e) \quad \text{i}$$

$$\left[\ \rho_e(x,y) = |x-y| , \quad x,y \in \mathbb{R}\ \right]$$

$\operatorname{arctg} : \ldots \to \ldots$ jsou izometrie.

- Buď $M$ libovolná množina.

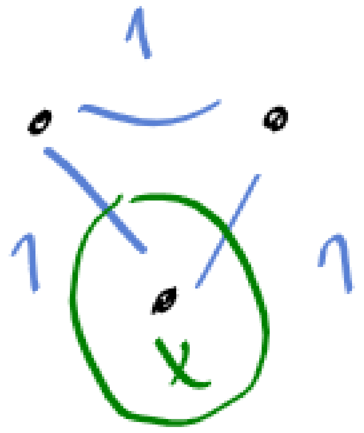
  $d : M \times M \longrightarrow [0,\infty)$ ... diskrétní metrika.

  $$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases} \qquad (\text{„}0\text{-}1\text{-metrika"})$$

  Buď $\rho : M \times M \to [0,\infty)$ libovolná jiná metrika na $M$. Pak zobrazení $\mathrm{Id} : M \to M$ je spojité $\mathrm{Id} : (M,d) \to (M,\rho)$.

**Důkaz:** $(M,d)$ ... $\forall x \in M$: $\{x\}$ je ot.

Protože $\{x\} = B_d(x, \frac{1}{2})$ ... ot.




Tedy $\forall A \subseteq M$: $A$ je ot. protože

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$$ a sjedn. otevřených je ot.

---

$Id: (M,d) \to (M,\rho)$, uvažujme lib. $U \subseteq M$ $\rho$-otevřenou. Pak

$Id^{-1}(U) = U$ je otevřená $(M,d)$. ⊠

---

Ve skutečnosti libovolné zobrazení

$f: (M,d) \to (X,\rho)$ je spojité.

**Důkaz:** Jako výše.

**Tvrzení 13:** Buďte $(X,\rho), (Y,\sigma)$ MP,

$f: (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ homeomorfismus.

Definujme pro všechna $y, y' \in Y$ zobrazení

$\sigma_1: Y \times Y \to [0,\infty)$ předpisem

$$\sigma_1(y,y') = \rho(f^{-1}(y), f^{-1}(y')).$$ Pak:

(i) $\sigma_1$ je metrika na $Y$;

(ii) $f: (X,\rho) \to (Y,\sigma_1)$ je izometrie

(iii) metriky $\sigma$ a $\sigma_1$ jsou topologicky ekviv.

**Definice:** Řekneme, že $\sigma$ a $\sigma_1$ jsou, pokud

$\{A \subseteq Y : A$ je otevřená v $(Y,\sigma)\} =$

$= \{A \subseteq Y : A$ je otevřená v $(Y,\sigma_1)\}$.

$(\forall A \subseteq Y: A$ je $\sigma$-ot. $\iff A$ je $\sigma_1$-ot.$)$

Důkaz: (i) Cv.

(ii) Nechť $x, x' \in X$ jsou libovolné body.

$\sigma_1(f(x), f(x')) = \rho(f^{-1}(f(x)), f^{-1}(f(x'))) =$

$= \rho(x, x')$, a tedy $f: (X, \rho) \to (Y, \sigma_1)$ je izo.

(iii) Nechť $U \subseteq Y$ ot. vzhledem k $\sigma$.

Pak $f^{-1}(U)$ je ot. ($f$ je homeo),

ale $f: (X, \rho) \to (Y, \sigma_1)$ je izometrie

$\Rightarrow f^{-1}$ je izometrie $\Rightarrow f^{-1}$ je spoj.

$U = f(f^{-1}(U)) = (f^{-1})^{-1}(f^{-1}(U))$ je ot.

ot. v $(X, \rho)$

$f^{-1}: (Y, \sigma_1) \to (X, \rho)$ tedy $U$ je ot. v $(Y, \sigma_1)$.

Podobně pokud $U$ je $\sigma_1$-ot., je $\sigma$-ot. ⊠

Příklad / Cv.: Metriky $\rho_1, \rho_2$ na $X$ jsou topologicky ekv., právě když

$$\mathrm{Id}: (X, \rho_1) \to (X, \rho_2) \text{ je homeo.}$$

Věta 14: Buďte $\rho_1, \rho_2$ metriky na $X$. Pak $\rho_1$ a $\rho_2$ jsou topol. ekvivalentní

$\iff$

$(\forall x \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in X: \rho_1(x,y) < \delta \Rightarrow \rho_2(x,y) < \varepsilon)$

$\wedge (\forall x \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in X: \rho_2(x,y) < \delta \Rightarrow \rho_1(x,y) < \varepsilon)$

Důkaz: Snadné cvičení.

**Příklad 15**: Je-li $(X,\rho)$ MP, můžeme definovat zobrazení $\rho_1 : X \times X \to \mathbb{R}$

$$\rho_1(x,y) = \min\{1, \rho(x,y)\}.$$

$\operatorname{diam}_{\rho_1}(X) \leq 1$
$\rho_1$ je omezená

**Cv.**: $\rho_1$ a $\rho$ jsou topologicky ekvivalentní.

„Na velkých vzdálenostech otevřenost (potažmo spojitost) nezáleží".

**Definice**: Buď $(X,\rho)$ MP, $A \subseteq X$.

- Definujeme $\operatorname{diam}_\rho(A) = \sup\{\rho(x,y) : x,y \in A\}$ průměr (diametr) množiny $A$.
- Řekneme, že $A$ je omezená, pokud $\operatorname{dim}_\rho(A) < \infty$.
- Ř., že $\rho$ je na $X$ omezená, pokud $X$ je omez.

**Příklad**:
- $(X,\rho)$ MP, $x \in X$, $r > 0$. Pak $\operatorname{diam} B_\rho(x,r) \leq 2r$ ne nutně „=". Najděte příklad kdy <.
- Buďiž $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq X$ konvergentní (tj. existuje $\lim_{n\to\infty} x_n \in X$). Pak $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ je omezená. **Cv.**

# OPERACE S METR. PROSTORY

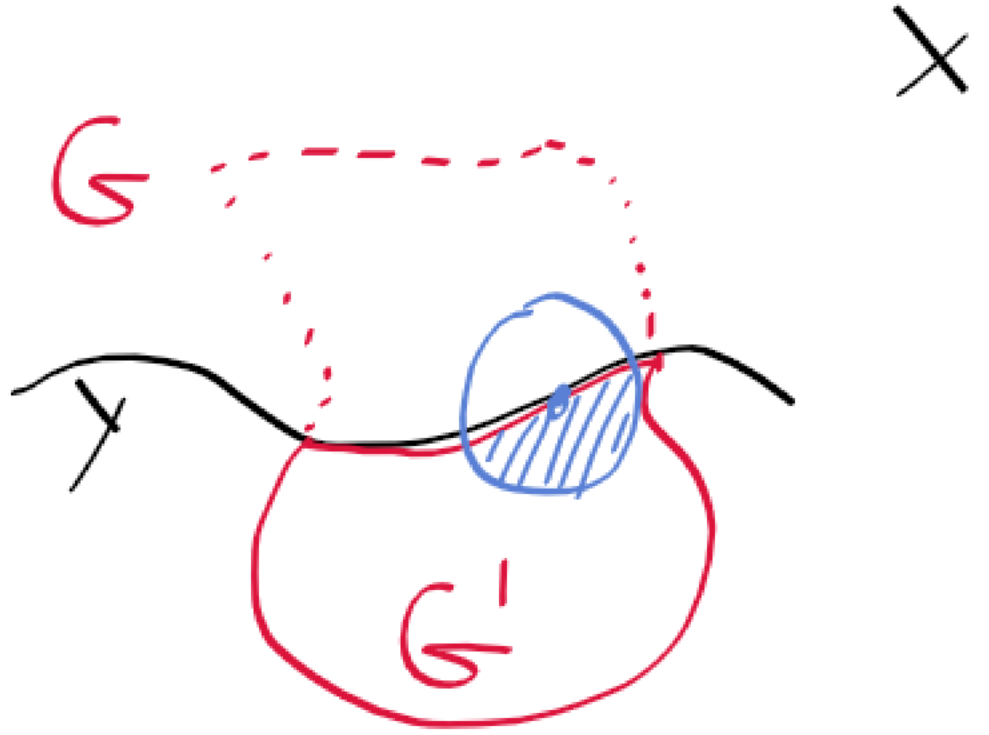
<u>Definice</u>: Je-li $(X,\rho)$ MP, $Y \subseteq X$, pak metrický prostor $(Y, \rho|_{Y\times Y})$ nazýváme podprostorem prostoru $(X,\rho)$, značíme $(Y,\rho)$.

[Pozn., že $(Y,\rho)$ je MP je zřejmé.]

<u>Tvrzení 16</u>: Buď $(X,\rho)$ M.P., $Y\subseteq X$. Pak

(i) Pokud $G \subseteq X$ je ot. v $(X,\rho)$, pak $G' = G\cap Y$ je ot. v $(Y,\rho)$.

(ii) Pokud $G' \subseteq Y$ je ot. v $(Y,\rho)$, pak $\exists\, G \subseteq X$ ot. v $(X,\rho)$: $G' = G\cap Y$.


<u>Důkaz</u>: (i) $G'$ je ot. v $(Y,\rho)$?

Nechť $y\in G'$. Protože $G$ je ot. v $X$, tak $\exists\, r>0$: $B_{(X,\rho)}(y,r) \subseteq G$.

Tedy $B_{(Y,\rho)}(y,r) = B_{(X,\rho)}(y,r)\cap Y \subseteq$

rozmyslete $\qquad \subseteq G\cap Y = G'$.

(ii) nechť je dána $G' \subseteq Y$ ot. v $(Y,\rho)$.

Pak $\forall x \in G'$ $\exists \varepsilon(x) > 0$: $B_{(Y,\rho)}(x, \varepsilon(x)) \subseteq G'$.

Zřejmě $G' = \bigcup_{x\in G'} B_{(Y,\rho)}(x,\varepsilon(x))$. ((V.))

Položme $G = \bigcup_{x\in G'} B_{(X,\rho)}(x,\varepsilon(x))$.

Tvrdíme, že $G \cap Y = G'$. (cv.)

$G$ je otevřená jako sjednocení ot. ☒

<u>Definice</u>: mějme MP $(X_\alpha,\rho_\alpha)$, $\alpha\in I$ (kde $I$ je „indexová množina" libovolné mohutnosti), které splňují

$\forall \alpha\in I\ \forall x,y\in X_\alpha: \rho_\alpha(x,y)\le 1$.

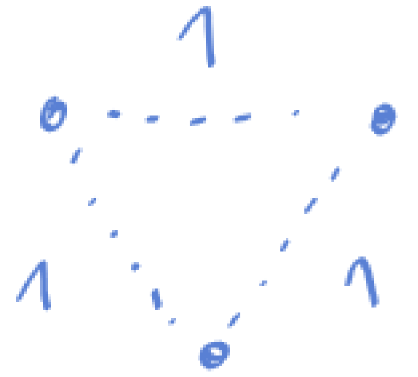
Sumou prostorů $(X_\alpha,\rho_\alpha)$ nazýváme prostor

$$\sum_{\alpha\in I}(X_\alpha,\rho_\alpha) = (X,\rho), \quad \text{kde}$$

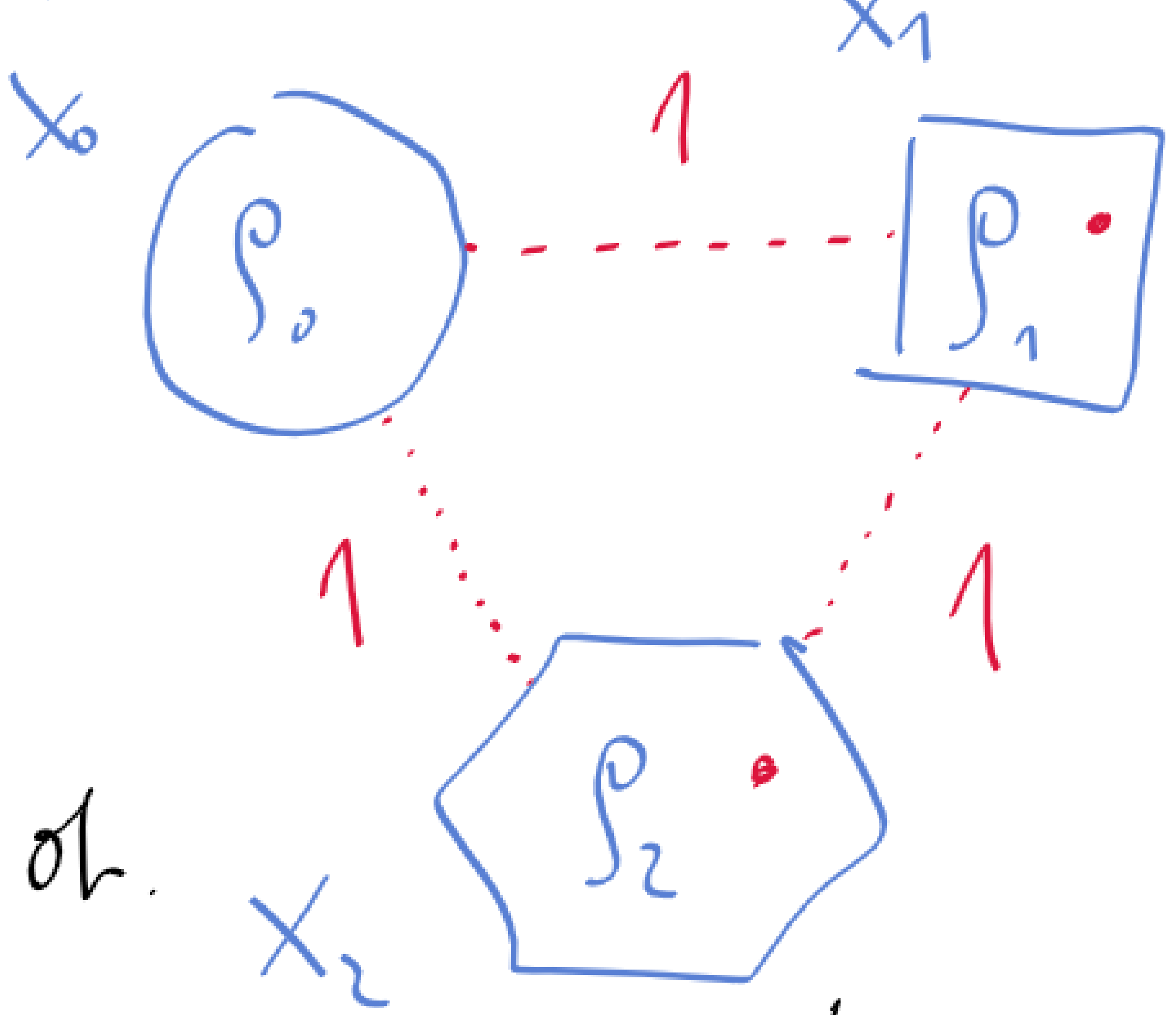
$X = \{(x,\alpha): x\in X_\alpha,\ \alpha\in I\}$ a

$$\rho((x,\alpha),(y,\beta)) = \begin{cases}\rho_\alpha(x,y), & \text{pokud } \alpha=\beta\\ 1, & \text{pokud } \alpha\ne\beta\end{cases}$$

DP




$\sum_{\alpha\in\{0,1,2\}}(X_\alpha,\rho_\alpha)$




<u>Cvičení</u>: • $\rho$ je metrika

• $G\subseteq \sum_{\alpha\in I}(X_\alpha,\rho_\alpha)$ je ot. $\iff \forall\alpha\in I: \{x\in X_\alpha : (x,\alpha)\in G\}$